

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)

**Notice:**

**Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.**

**Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)**

# 2014 年青少年數學國際城市邀請賽

## 參賽代表遴選初賽個人賽試題

\_\_\_\_\_縣市\_\_\_\_\_國民中學\_\_\_\_\_年級 編號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

作答時間：二小時

性別：男 女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 某一個班級 20 位男生的平均體重為 62 Kg，而該班 15 位女生的平均體重為 55 Kg，則這個班級 35 位學生的平均體重為\_\_\_\_\_Kg。

答：\_\_\_\_\_Kg

2. 設  $B = 103^2 - 102^2 + 101^2 - 100^2 + \dots + 3^2 - 2^2 + 1^2$ ，則  $B$  的最大質因數為\_\_\_\_\_。

答：\_\_\_\_\_

3. 設  $A = 2^{2014} - 1$ ，則  $A$  的末二位數碼為\_\_\_\_\_。

答：\_\_\_\_\_

4. 設  $P$  為正整數，已知  $P$  被 3 除時所得的餘數為 1；被 5 除時所得的餘數為 3；被 7 除時所得的餘數為 5，則  $P$  的最小值為\_\_\_\_\_。

答：\_\_\_\_\_

5. 設  $a$ 、 $b$  均為正整數，已知  $2ax^2 + 3bx + 1 = 0$  有相異的實數根且二根的絕對值均小於 1，則  $2a + 3b$  的最小值為\_\_\_\_\_。

答：\_\_\_\_\_

6. 若  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$ 、 $x_4$  為互不相等的正奇數，且滿足

$$(103 - x_1)(103 - x_2)(103 - x_3)(103 - x_4) = 24^2,$$

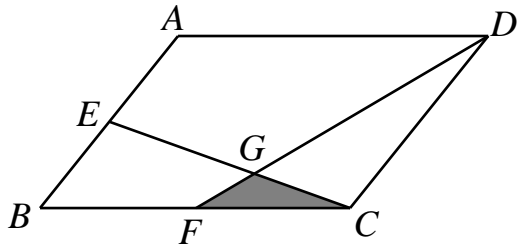
則  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =$ \_\_\_\_\_。

答：\_\_\_\_\_

7. 設  $\alpha$ 、 $\beta$  是方程  $x^2 - x - 1 = 0$  的二根，若  $\alpha^{2013} - \beta^{2013} = t$  且  $\alpha^{2011} - \beta^{2011} = s$ ，則以  $s$  與  $t$  表示  $\alpha^{2014} - \beta^{2014}$  之值為\_\_\_\_\_。

答：\_\_\_\_\_

8. 在平行四邊形  $ABCD$  中，點  $E$ 、 $F$  分別為  $AB$ 、 $BC$  的中點，若  $CE$  與  $DF$  相交於點  $G$ ，如下圖所示。則三角形  $CGF$  的面積與四邊形  $ABCD$  的面積之比為\_\_\_\_\_。



答：\_\_\_\_\_。

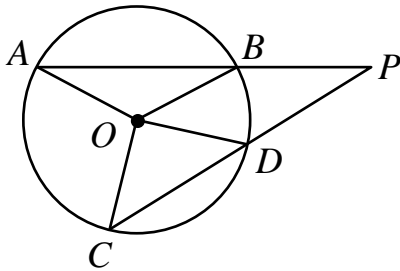
9. 設  $n$  為正整數，若數列  $\{x_n\}$  的前  $n$  項之和  $S_n = n^3$ 。今造一個新數列  $\{y_n\}$ ，其中  $y_1 = 1$ ，而對  $n \geq 2$  的正整數， $y_n = \frac{1}{x_n - 1}$ 。令  $y_{101} + y_{102} + y_{103} + \dots + y_{2014}$  之值的最簡分數為  $\frac{q}{p}$ ，則  $p - q$  之值為\_\_\_\_\_。

答：\_\_\_\_\_。

10. 設直角三角形的三邊長  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為正整數，其中  $a \geq b \geq c$ ；若此直角三角形的周長為 30，則  $a^{2012} + b^{2013} + c^{2014}$  的個位數碼為\_\_\_\_\_。

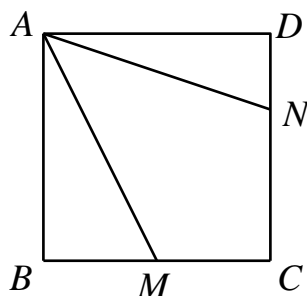
答：\_\_\_\_\_。

11. 自圓  $O$  外一點  $P$  作割線  $PA$ 、 $PC$  分別交圓於點  $B$ 、 $D$ ，如下圖所示。已知  $\angle APC = 32^\circ$ ，則  $\angle AOC - \angle BOD =$ \_\_\_\_\_。



答：\_\_\_\_\_。

12. 已知  $BC$  與  $CD$  為正方形  $ABCD$  相鄰的兩個邊，若點  $M$ 、 $N$  分別為  $BC$ 、 $CD$  邊上的點且滿足  $3DN = AD$  及  $\angle MAN = 45^\circ$ ，則  $\frac{AM}{AN} =$ \_\_\_\_\_。

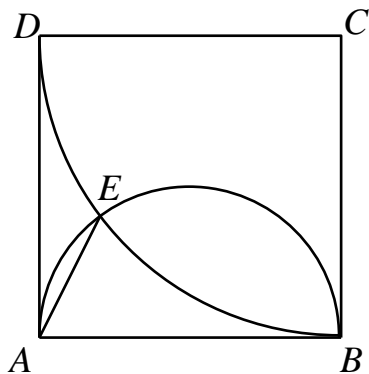


答：\_\_\_\_\_。

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 已知正方形  $ABCD$  的邊長為 2 cm，以點  $C$  為圓心並以  $CB$  為半徑所作的圓與以  $AB$  為直徑所作的圓交於點  $E$  與點  $B$ ，如圖所示。試求線段  $AE$  之長。



答： \_\_\_\_\_ cm

2. 將  $n$  個不同的正整數  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  按順時針方向放在一個圓周上，若對於 1、2、3、...、10 這十個正整數中的任意一個數  $b$ ，均能找到一個正整數  $i$ ，使得  $a_i = b$  或  $a_i + a_{i+1} = b$ ，並規定  $a_{n+1} = a_1$ ，試求正整數  $n$  的最小值。

答： \_\_\_\_\_

3. 現有 27 枚砝碼，重量分別為  $1^2$  克、 $2^2$  克、...、 $27^2$  克，將它們分成砝碼枚數相同且總重量相等的三堆，已知  $1^2$ 、 $11^2$ 、 $21^2$  與  $25^2$  克的砝碼在同一堆，請問同在這一堆的砝碼還有哪些？

答：

---