# 2014年青少年數學國際城市邀請賽

## 參賽代表遴選初賽個人賽試題

________縣市________國民中學____年級　編號：________　姓名：__________

作答時間: 二 小 時　　　　　　　　　　　　　　　　　　　性別: □男　□女

第一部分：填充題，每小題5分，共60分

**(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)**

1. 某一個班級20位男生的平均體重為62 Kg，而該班15位女生的平均體重為55 Kg，則這個班級35位學生的平均體重為__________Kg。

答：________________Kg

2. 設$B=103^2-102^2+101^2-100^2+\cdots+3^2-2^2+1^2$，則$B$的最大質因數為___。

答：________________

3. 設$A=2^{2014}-1$，則$A$的末二位數碼為_______。

答：________________

4. 設$P$為正整數，已知$P$被3除時所得的餘數為1；被5除時所得的餘數為3；被7除時所得的餘數為5，則$P$的最小值為__________。

答：________________

5. 設$a$、$b$均為正整數，已知$2ax^2+3bx+1=0$有相異的實數根且二根的絕對值均小於1，則$2a+3b$的最小值為__________。

答：________________

6. 若$x_1$、$x_2$、$x_3$、$x_4$為互不相等的正奇數，且滿足

$$(103-x_1)(103-x_2)(103-x_3)(103-x_4)=24^2，$$

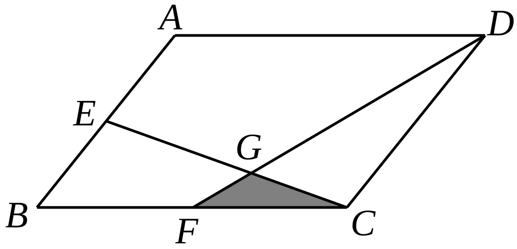
則$x_1+x_2+x_3+x_4=$_________。

答：________________

7. 設$\alpha$、$\beta$是方程$x^2-x-1=0$的二根，若$\alpha^{2013}-\beta^{2013}=t$且$\alpha^{2011}-\beta^{2011}=s$，則以$s$與$t$表示$\alpha^{2014}-\beta^{2014}$之值為__________。

答：________________

8. 在平行四邊形 $ABCD$ 中，點 $E$、$F$ 分別為 $AB$、$BC$ 的中點，若 $CE$ 與 $DF$ 相交於點 $G$，如下圖所示。則三角形 $CGF$ 的面積與四邊形 $ABCD$ 的面積之比為______：______。




答：______：______

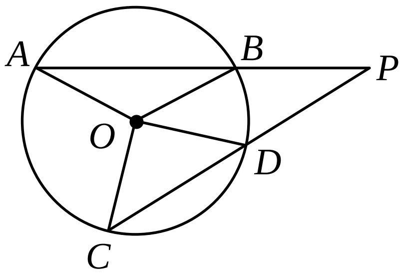
9. 設 $n$ 為正整數，若數列 $\{x_n\}$ 的前 $n$ 項之和 $S_n = n^3$。今造一個新數列 $\{y_n\}$，其中 $y_1 = 1$，而對 $n \geq 2$ 的正整數，$y_n = \dfrac{1}{x_n - 1}$。令 $y_{101} + y_{102} + y_{103} + \cdots + y_{2014}$ 之值的最簡分數為 $\dfrac{q}{p}$，則 $p-q$ 之值為__________。

答：__________

10. 設直角三角形的三邊長 $a$、$b$、$c$ 為正整數，其中 $a \geq b \geq c$；若此直角三角形的周長為 30，則 $a^{2012} + b^{2013} + c^{2014}$ 的個位數碼為____________。

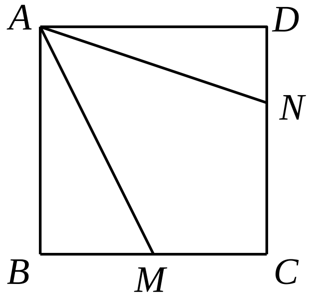
答：__________

11. 自圓 $O$ 外一點 $P$ 作割線 $PA$、$PC$ 分別交圓於點 $B$、$D$，如下圖所示。已知 $\angle APC = 32°$，則 $\angle AOC - \angle BOD =$_______°。




答：__________°

12. 已知 $BC$ 與 $CD$ 為正方形 $ABCD$ 相鄰的兩個邊，若點 $M$、$N$ 分別為 $BC$、$CD$ 邊上的點且滿足 $3DN = AD$ 及 $\angle MAN = 45°$，則 $\dfrac{AM}{AN} =$ ____________。

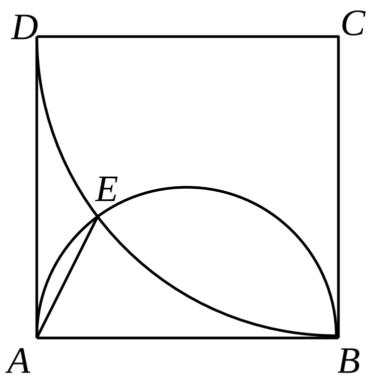



答：__________

## 第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

**(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)**

1. 已知正方形 $ABCD$ 的邊長為 2 cm，以點 $C$ 為圓心並以 $CB$ 為半徑所作的圓與以 $AB$ 為直徑所作的圓交於點 $E$ 與點 $B$，如圖所示。試求線段 $AE$ 之長。




答：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ cm

2. 將 $n$ 個不同的正整數 $a_1$、$a_2$、⋯、$a_{n-1}$、$a_n$ 按順時針方向放在一個圓周上，若對於 1、2、3、…、10 這十個正整數中的任意一個數 $b$，均能找到一個正整數 $i$，使得 $a_i = b$ 或 $a_i + a_{i+1} = b$，並規定 $a_{n+1} = a_1$，試求正整數 $n$ 的最小值。

答：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

3. 現有 27 枚砝碼，重量分別為$1^2$克、$2^2$克、…、$27^2$克，將它們分成砝碼枚數相同且總重量相等的三堆，已知$1^2$、$11^2$、$21^2$與$25^2$克的砝碼在同一堆，請問同在這一堆的砝碼還有哪些？

答：____________________